29.03.16

$f: (\mathbb{R}, |\,|) \to (\mathbb{R}, |\,|)$ ← αυτά τα έχουμε δει στους απειροστικούς

$f: (\mathbb{R}^n, \|\,\|) \to (\mathbb{R}^m, \|\,\|)$

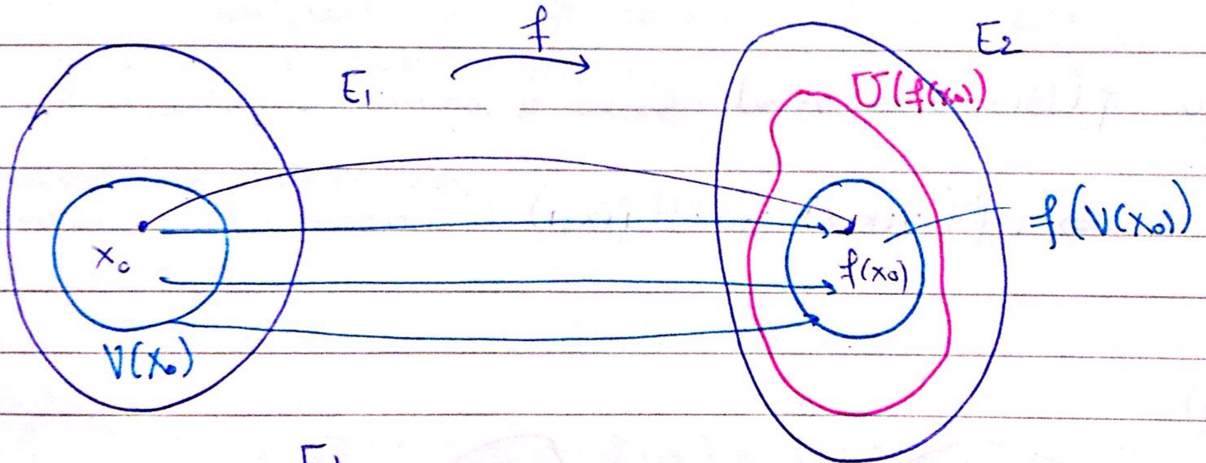
$x_0 \in \mathbb{R}^n$, f συνεχής στο $x_0 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \Big[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^n)\ \|x - x_0\|_n < \delta$
$\Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_m < \varepsilon \Big]$

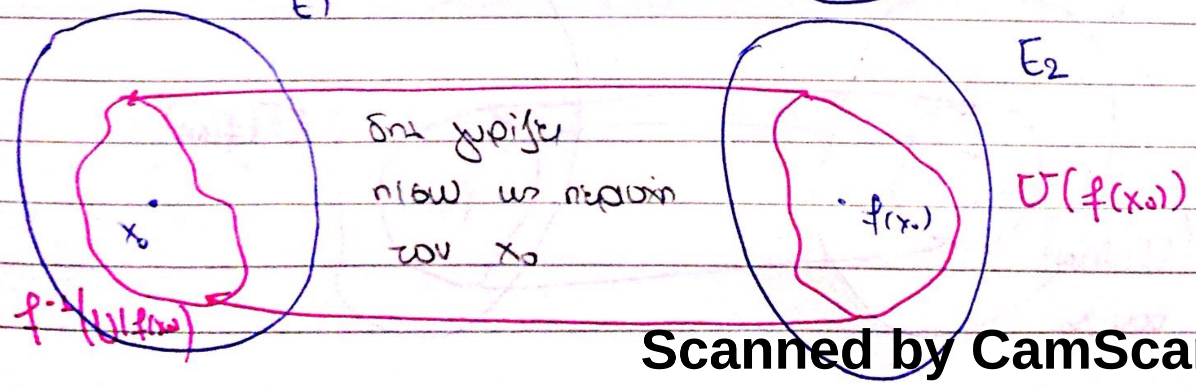
Τώρα, θεωρούμε: $f: (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$, $x_0 \in E_1$

f συνεχής στο $x_0 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \Big[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in E_1)\ \rho_1(x, x_0) < \delta$
$\Rightarrow \rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Big]$

ΠΡΟΤΑΣΗ Ας είναι $f: (E_1, \rho_1) \to (E_2, \rho_2)$ μια συνάρτηση και $x_0 \in E_1$.
Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) f συνεχής στο x_0
ii) $(\forall\, U(f(x_0)))(\exists\, V(x_0)): f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$
iii) $(\forall\, U(f(x_0)))$ το σύνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ είναι περιοχή του x_0
iv) Για κάθε ακολουθία $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν E_1, με $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} a_\nu = x_0$,
ισχύει $\lim_{\nu \in \mathbb{N}} f(a_\nu) = f(x_0)$.





Ισχύει: $f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\}$

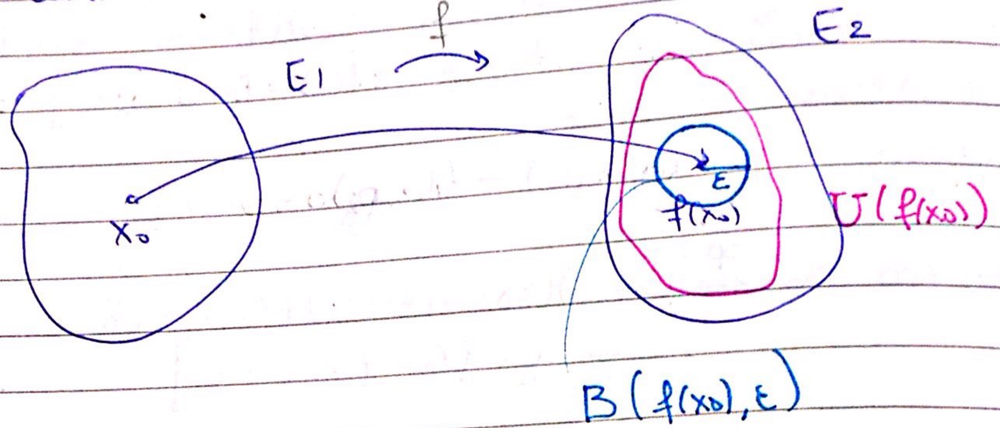
Ισχύουν:
- $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
- $Y \supseteq f(f^{-1}(Y))$

Απόδειξη

(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i)

(i) ⇒ (ii)

Έστω f συνεχής στο x_0 και $U(f(x_0))$ τυχαία περιοχή του $f(x_0)$



Άρα, υπάρχει $\varepsilon>0$, $B(f(x_0),\varepsilon) \subseteq U(f(x_0))$.

Επειδή η f συνεχής στο x_0, από τον ορισμό, έχουμε:

$(\exists\delta>0)(\forall x\in E_1)\ \rho_1(x,x_0)<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

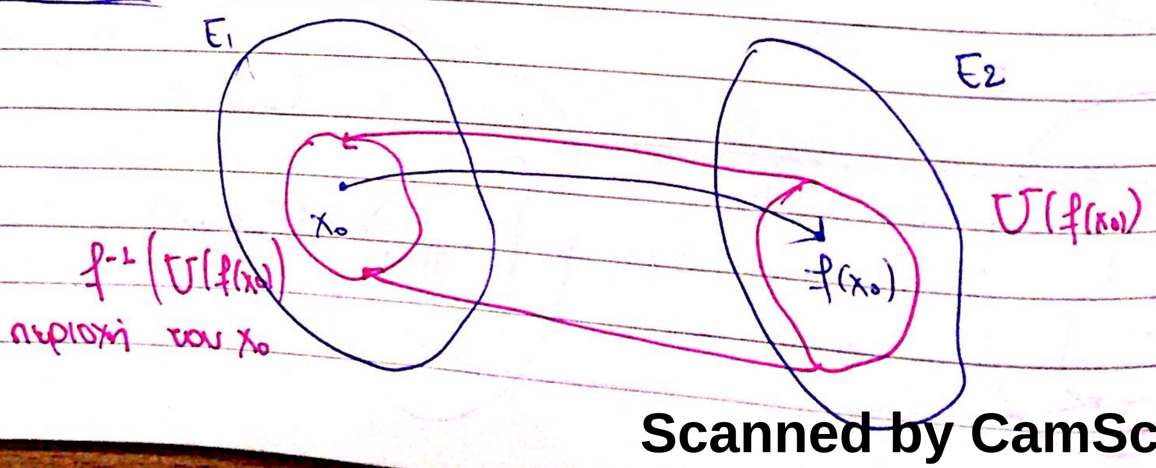
Αυτό σημαίνει ότι: $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon) \subseteq U(f(x_0))$

δηλ. αυτά είναι εδώ και τα f αυτών είναι εκεί

Ονομάζω $B(x_0,\delta) = V(x_0)$ (γιατί μέσα σε μια σφαιρική περιοχή, με κάποια τροποποίηση μπορώ να έχω περιοχή)

$\Rightarrow f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$ | δηλ. ξεχνάω το μεσαίο και κρατάω τα δύο ακριανά

(ii) ⇒ (iii)



Έστω $U(f(x_0))$ τυχούσα περιοχή του x_0.
Τότε, από το (vi), υπάρχει περιοχή $V(x_0)$ τέτοια ώστε:

$$f(V(x_0)) \subseteq U(f(x_0))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(V(x_0))) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0)))$$

το f^{-1} διατηρεί τη σχέση υποσυνόλων

$$\xRightarrow{V(x_0) \subseteq f^{-1}(f(V(x_0)))} V(x_0) \subseteq f^{-1}(U(f(x_0)))$$

(και ξέρουμε ότι τυχόν υπερσύνολο μιας περιοχής είναι κι αυτό περιοχή, άρα έχουμε το συμπέρασμα)

$\Rightarrow f^{-1}(U(f(x_0)))$ περιοχή του x_0

(iii) ⇒ (iv)

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν E_1, με $\lim a_\nu = x_0$.
Θ.δ.ο. $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} f(a_\nu) = f(x_0)$

(Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = x_0$$

$$\rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} f(a_\nu) = f(x_0)$$
)

Θεωρούμε, επιπλέον, $U(f(x_0))$ τυχούσα περιοχή του $f(x_0)$.
Τότε, από το (iii), το σύνολο $f^{-1}(U(f(x_0)))$ είναι περιοχή του x_0.

$$\xRightarrow{\rho_1 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = x_0} a_\nu \in f^{-1}(U(f(x_0))) \text{ τελικά για όλα τα } \nu$$

Άρα, $f(a_\nu) \in f(f^{-1}(U(f(x_0))))$ τελικά

$$\xRightarrow{f(f^{-1}(U(f(x_0)))) \subseteq U(f(x_0))} f(a_\nu) \in U(f(x_0)) \text{ τελικά}$$

Άρα: $\rho_2 - \lim_{\nu\in\mathbb{N}} f(a_\nu) = f(x_0)$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Έστω ισχύει το (iv) και όχι το (i). Τότε:
$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x\in E_1)$ $\rho_1(x,x_0)<\delta$ και $\rho_2(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$

$\delta=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$: $(\exists x_\nu)$ $\rho_1(x_\nu,x_0)<\frac{1}{\nu}$ και $\rho_2(f(x_\nu),f(x_0))\geq\varepsilon$

$(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$: $0\leq\rho_1(x_\nu,x_0)<\frac{1}{\nu}$ και $\rho_2(f(x_\nu),f(x_0))\geq\varepsilon$

$(f(x_\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$:

$\Downarrow$ $\lim\rho(x_\nu,x_0)=0$ $\Downarrow$ $\lim x_\nu=x_0$

$\Downarrow$ $f(x_\nu)\not\to f(x_0)$ $\lightning$

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σ' όλο το πεδίο.

Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Ψάχνουμε και για την ολική συνέχεια, δηλ. να μην εμπλέκεται σημείο.

ΠΡΟΤΑΣΗ Ας είναι $f: E_1\to E_2$ συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής αν και μόνο αν, ισχύει ένα από τα εξής:
(i) $\forall A\subseteq E_2$, A ανοιχτό ισχύει $f^{-1}(A)$ ανοιχτό (εν E_1)
(ii) $\forall K\subseteq E_2$, K κλειστό ισχύει $f^{-1}(K)$ κλειστό (εν E_1)

Ισχύει: $f^{-1}(A)=\{x\in E_1 : f(x)\in A\}$ $\not\Rightarrow$ ότι η f^{-1} ορίζεται και είναι συνάρτηση

$\rightarrow$ αυτό θα ισχύε μόνο αν η f είναι 1-1 και επί

Η αντιστροφή εικόνα ορίζεται πάντα!
(δηλ. ορίζεται ό,τι κι αν είναι η f)

Επίσης: $f^{-1}(X^c)=(f^{-1}(X))^c$

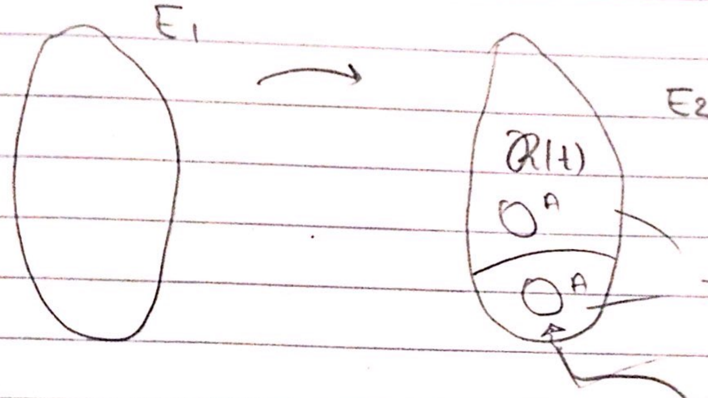
Απόδειξη

Αφού $f^{-1}(X^c) = (f^{-1}(X))^c$, Θ.δ.ο. f συνεχής $\Leftrightarrow$ (i).

($\Longrightarrow$)

Έστω f συνεχής και A τυχόν υποσύνολο του E_2, ανοιχτό.
Θ.δ.ο. $f^{-1}(A)$ ανοιχτό (υποσύνολο του E_1)

Αν $f^{-1}(A) = \emptyset$, ισχύει το συμπέρασμα (αφού το $\emptyset$ είναι και ανοιχτό και κλειστό)



(Έχουμε γενική περίπτωση, δηλ. η f ούτε 1-1 ούτε επί.)

το A μπορεί να πέφτει οπουδήποτε, αν πέφτει εδώ: $f^{-1}(A) = \emptyset$.

Υποθέσαμε ότι $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ και έστω x τυχόν, $x \in f^{-1}(A)$.
Άρα $f(x) \in A \xRightarrow{A \text{ ανοιχτό}} \exists\, U(f(x)) \subseteq A$

$$\Longrightarrow \underbrace{f^{-1}(U(f(x)))} \subseteq f^{-1}(A)$$

από το (ii) της προηγούμενης πρότασης $\longleftarrow$ περιοχή του x (επειδή f συνεχής στο x)

αφού f συνεχής παντού άρα συνεχής και στο x

Άρα: $f^{-1}(A)$ ανοιχτό

($\Longleftarrow$)

Έστω ότι ισχύει το (i). Θ.δ.ο. f συνεχής στο τυχόν $x \in E_1$.

Θεωρούμε $U(f(x))$ τυχούσα περιοχή του $f(x)$.
Άρα $(\exists r>0)\ B(f(x),r) \subseteq U(f(x))$

$$\Rightarrow \underbrace{x \in}_{\text{αφού το } f(x) \text{ ανήκει εδώ}} \underbrace{f^{-1}(B(f(x),r))} \subseteq f^{-1}(U(f(x)))$$

ανοιχτό σύνολο λόγω της υπόθεσης (i),
άρα είναι περιοχή του x

άρα και το $f^{-1}(U(f(x)))$ είναι περιοχή του

$\Rightarrow$ f συνεχής

αφού υπερσύνολο περιοχής είναι περιοχή

λόγω της προηγούμενης πρότασης (από το (iii))